تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2011

تقديـــم: ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمرين الأول :



1)نبين أن $A^{2k}=I \quad (\forall k\in N)$:

نستعمل الإستدلال بالترجع

من أجل $k=0$ لدينا $A^0=I$ (معطيات)

ليكن k من N .

نفترض أن $A^{2k}=I$. لنبين أن : $A^{2(k+1)}=I$

لدينا : $A^{2(k+1)}=A^{2k}\times A^2$.

وبما أن $A^{2k}=I$

و
$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2&0\\\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt2}{2}\right)^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

فإن : $A^{2(k+1)}=I\times I=I$

ومنه : $A^{2k}=I \quad (\forall k\in N)$

2)نبين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ونحدد A^{-1} :

لدينا $A^2=I$ أي $A\times A=I$

ومنه

المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ولدينا $A^{-1}=A$.

الجزء الثاني :

1)أ-نبين ان * قانون تركيب داخلي في I:

ليكن x و y عنصرين من I .لنبين ان $x*y$ عنصر من I .

لدينا : $x\in I$ و $y\in I$ إذن $x-a\succ 0$ و $y-b\succ 0$

وبالتالي $(x-a)(y-a)+a\succ a$ أي $x*y\succ a$ ومنه $x*y\in I$.

وعليه فإن لكل x و y من I لدينا $x*y\in I$.

ومنه

* قانون تركيب داخلي في I.

1)ب-نبين ان * قانون تبادلي :

ليكن x و y عنصرين من I .

لدينا $x*y=(x-a)(y-a)+a=(y-a)(x-a)+a=y*x$

ومنه : $x*y=y*x$ لكل x و y من I. وبالتالي :

* قانون تبادلي .

. نبين أن ∗ تجميعي :

x و y و z عناصر من I .

لدينا :



$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y-a)(z-a)+a\\ &= ((x-a)(y-a)+a-a)(z-a)+a\\ &((x-a)(y-a))(z-a)+a\\ &= (x-a)[(y-a)(z-a)]+a\\ &= (x-a)\left[\underbrace{(y-a)(z-a)+a}_{y*z}-a\right]+a\\ &= (x-a)[(y*z)-a]+a\\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

ومنه $(x*y)*z=x*(y*z)$ لكل x و y و z من I

وبالتالي

القانون ∗ تجميعي .

1)ج-نبين ان القانون ∗ يقبل عنصرا محايدا .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون ∗ في I فإن $(\forall x\in I): x*e=x$ (∗ تبادلي)

يكافئ $(\forall x\in I): (x-a)(e-a)+a=x$

يكافئ $(\forall x\in I): (e-a)x-a(e-a)+a=x$

يكافئ $\begin{cases} e-a=1\\ -a(e-a)+a=0\end{cases}$

يكافئ $e=1+a$

ومنه

$(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا وهو $e=1+a$.

2)نبين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية :

ليكن x و x' عنصرا من I .

لدينا

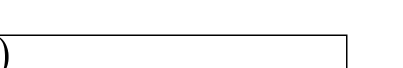
$$x*x'=e \Leftrightarrow (x-a)(x'-a)+a=1+a$$
$$\Leftrightarrow x'=\frac{1}{x-a}+a \qquad (x\succ a)$$

ولدينا $x'\succ a$

ومنه لكل x من I مماثلا في I وهو $\frac{1}{x-a}+a$.

وبما أن ∗ قانون تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في I .

فإن





$(I,*)$ زمرة تبادلية .

3)أ)نبين أن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(R_+^*,\times)$:

ليكن x و y عنصرين من I .

$$\varphi(x*y)=\frac{1}{x*y-a}=\frac{1}{(x-a)(y-a)+a-a}=\frac{1}{x-a}\times\frac{1}{y-a}=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

ومنه لكل x و y من I لدينا $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

وبالتالي

φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(R_+^*,\times)$.

نبين أن φ تقابل من I نحو R_+^* .

ليكن y عنصرا من R_+^* .

لدينا :

$$y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x-a}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+a$$

بما أن $y\succ 0$ فإن $\frac{1}{y}+a\succ a$ أي أن $x\in I$

ومنه لكل y من I يوجد عنصروحيد x في I حيث $\varphi(x)=y$.

وعليه فإن



φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(R_+^*,\times)$

3)ب-نحل في المجموعة I المعادلة $x^{(3)}=a^3+a$:

لدينا $x^{(3)}=a^3+a\Leftrightarrow\varphi\left(x^{(3)}\right)=\varphi\left(a^3+a\right)$ لأن φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(R_+^*,\times)$

ومنه



$$x^{(3)}=a^3+a\Leftrightarrow\varphi(x*x*x)=\varphi\left(a^3+a\right)$$
$$\Leftrightarrow\varphi(x)\times\varphi(x)\times\varphi(x)=\varphi\left(a^3+a\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\frac{1}{a^3+a-a}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\frac{1}{a^3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-a}=\frac{1}{a}\qquad(a\succ 0)$$
$$\Leftrightarrow x=2a$$

ومنه

المعادلة تقبل حلا وحيدا وهو $2a$

التمرين الثا :

1)نبين ان N يقبل القسمة على 11 :

لدينا العدد N ممثل في نظمة العد العشري إذن : $N=1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{2009}$

نستنتج أن العدد N هو مجموع حدود متتابعة لمتالية هندسية أساسها 10.

ومنه حسب صيغة المجموع : $N=\frac{10^{2010}-1}{10-1}$

ولدينا $10\equiv -1\;[11]$ إذن $10^{2010}\equiv(-1)^{2010}\;[11]$ أي $10^{2010}\equiv 1\;[11]$.

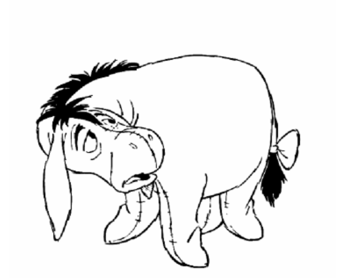
وبالتالي $10^{2010}-1\equiv 0\;[11]$

وحيث أن $9 \wedge 11 = 1$ فإن $\frac{10^{2010}-1}{9} \equiv 0\ [11]$. (لاحظ أن $\frac{10^{2010}-1}{10-1}$ عدد طبيعي محترم !)

وبالتالي $N \equiv 0\ [11]$ وهذا يعني أن

Nيقبل القسمة على 11.

ملاحظة : لدينا $10 \equiv -1\ [11]$ إذن :



$$N \equiv 1+(-1)^1+(-1)^2+\ldots+(-1)^{2010}\quad [11]$$
$$\equiv \underbrace{1-1+1-1+\ldots-1+1}_{2010\ fois 1}\quad [11]$$
$$\equiv 0\quad [11]$$

وبالتالي Nيقبل القسمة على 11.

2)أ-نتحقق من أن العدد 2011 أولي

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي : 2 ، 3 ، 5 ، ... و43

بما أن العدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فإنه أولي .

. من خلال السؤال 1 لدينا $N = \frac{10^{2010}-1}{10-1}$ إذن :

$10^{2010}-1 = 9N$

2)ب-نبين أن 2011 يقسم $9N$:

لدينا 2011 عدد أولي و $10 \wedge 2011 = 1$

إذن حسب مبرهنة فيرما الصغرى لدينا : $10^{2010} \equiv 1\ [2011]$

وبالتالي : $10^{2010}-1 \equiv 0\ [2011]$

وحيث أن $10^{2010}-1 = 9N$ فإن $9N \equiv 0\ [2011]$

ومنه :

2011 يقسم $9N$.

2)ج)استنتاج :

لدينا 2011 يقسم $9N$ و $9 \wedge 2011 = 1$ إذن 2011 يقسم N حسب مبرهنة كوص.

3)نبين أن N يقبل القسمة على 22121 :

لدينا $22121 = 11 \times 2011$

وبما أن $N \equiv 0\ [11]$ و $N \equiv 0\ [2011]$ و $11 \wedge 2011 = 1$

فإن $N \equiv 0\quad [11 \times 2011]$

أي $N \equiv 0\quad [22121]$

وهذا يعني أن :

العدد N يقبل القسمة على 22121 .

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

1)نتحقق من ان $z_1 = -m+2$ حل للمعادلة (E_m) : تعويض

2)أ- نبين أن : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

نعلم أن $z_1 z_2 = -im^2 - 2(1-i)m + 4$ (جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية)

وبالتالي :

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$$
$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

2)ب- لنحل في C المعادلة $im^2+2(1-i)m-3=0$:

المميزالمختصر لهذه المعادلة هو $\delta=(1-i)^2+3i=i=\frac{1}{2}(2i)=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)\right)^2$

ومنه $m=\dfrac{-(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i}$ أو $m=\dfrac{-(1-i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i}$

وبالتالي :

$$m=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \quad \text{أو} \quad m=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

الجزء الثاني :

1)أ)نبين ان :

نعتبر النقطة $I(1)$.

لدينا
$$S(M)=M' \Leftrightarrow z'-1=-(z-1)$$
$$\Leftrightarrow z_{M'}-z_I=-(z_M-z_I)$$
$$\Leftrightarrow z_{\overline{IM'}}=-z_{\overline{IM}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$$

وبالتالي

S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة $I(1)$

1)ب)نبين ان $z''=iz+2$:

لدينا
$$M''=R(M)\Leftrightarrow z''=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1-i)+1+i$$
$$\Leftrightarrow z''=i(z-1-i)+1+i$$
$$\Leftrightarrow z''=iz+2$$

ومنه

$$z''=iz+2$$

2)أ) نحسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$:

لدينا : $\dfrac{z''-2}{z'-2}=\dfrac{iz}{-(z-1)-1}=-i$

استنتاج : لدينا $\dfrac{z''-2}{z'-2}=-i$

إذن : $\dfrac{z''-2}{z'-2}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $\left|\dfrac{z''-2}{z'-2}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z''-2}{z'-2}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\dfrac{AM''}{AM'}=1$ و $\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]$. ومنه :

AM’M’’ مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

2)ب) نحدد مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ω و M’ و M’’ متداورة :

لتكن M نقطة من المستوى تخالف Ω و O . وبالتالي النقط A و Ωو 'M و''M مختلفة .



ومنه النقط A و Ωو 'M و''M متداورة يكافئ $\frac{z''-2}{z'-2}\times\frac{z'-1-i}{z''-1-i}\in R$

يكافئ $\frac{z-1+i}{z-i-1}\in R$

يكافئ $\frac{z-1+i}{z-i-1}=\overline{\left(\frac{z-1+i}{z-i-1}\right)}$

يكافئ $z+\bar{z}=2$

يكافئ $\text{Re}(z)=1$

في حالة $M=\Omega$ نجد أن $M'(1-i)$ و $M''=\Omega$.

ولدينا A و Ωو $M'(1-i)$ غير مستقيمية ومنه A و Ωو 'M و''M متداورة.

وعليه فإن :

مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ωو 'M و''M متداورة هي المستقيم الذي معادلة $x=1$

التمرين الرابع :

الجزءالأول :

1)نتحقق من أن $e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)$

ليكن x عنصرا من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$. لدينا :

$$e^x=x^n \Leftrightarrow x=\ln x^n$$
$$\Leftrightarrow x=n\ln x$$
$$\Leftrightarrow n=f(x)$$

ومنه

$e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)$

2)لنبين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 :

لدينا : $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{\ln x}=0=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ لأن $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\ln x=-\infty$

وبما أن $0\in R$ فإن

f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .



3)حساب النهايات :





$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to1^-}\ln x=0^-$.

$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to1^+}\ln x=0^+$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

هندسيا: المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار $(+\infty)$.

4)ندرس تغيرات الدالة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$$

ولدينا : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

و $f'(x)\prec 0 \Leftrightarrow x\in]0,1[\cup]1,e[$

نستنتج ان

f تزايدية قطعا على $[e,+\infty[$ وتناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات f هو :

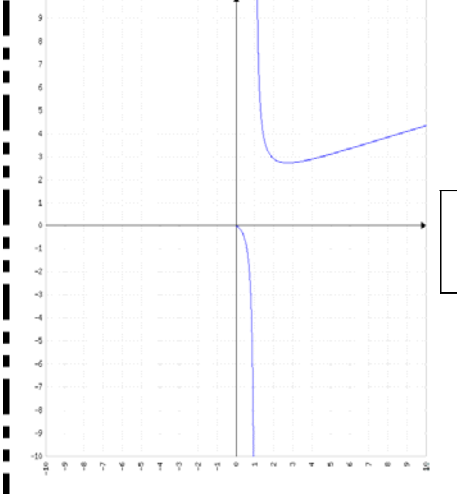
x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
f	0 ↘ $-\infty$	$(+\infty)$ ↘	e	↗ $+\infty$

5)نبين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f''(x)=\frac{\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln x}{x}(\ln(x)-1)}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{\ln x}{x(\ln x)^4}[\ln(x)(2-\ln x)]$$



ولدينا :

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=2$$
$$\Leftrightarrow x=e^2$$

المشتقة الثانية للدالة f تنعدم في العدد e^2 وتغير إشارتها بجواره

إذن :

المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتيها هو $\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$.

6)إنشاء (C).

7)نفترض أن $n\geq 3$.

لدينا. $f(x)\in]-\infty,0]$ لكل x من $]0,1[$ إذن المعادلة لاتقبل حلا في $]0,1[$

الدالة. f متصلة و تناقصية قطعا على $]1,e]$

إذن $f(]1,e])=[e,+\infty[$

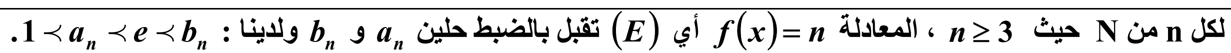
وبما أن $n\in[e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد في $]1,e]$ حيث $f(a_n)=n$

الدالة. f متصلة و تزايدية قطعا على $]1,e]$

إذن f تقابل من $[e,+\infty[$ نحو $[e,+\infty[$.

وبما أن $n\in[e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد b_n في $[e,+\infty[$ حيث $f(b_n)=n$.

ومنه :



لكل n من N حيث $n\geq 3$ ، المعادلة $f(x)=n$ أي (E) تقبل بالضبط حلين a_n و b_n ولدينا : $1\prec a_n\prec e\prec b_n$.

الجزء الثاني :

1)بين أن $b_n\geq n$: $(\forall n\geq 3)$

ليكن n من N حيث $n\geq 3$.

لدينا $f(b_n)=n$ و $b_n\in[e,+\infty[$.

ولدينا $b_n - f(b_n) = b_n - \frac{b_n}{\ln b_n} = b_n\left(\frac{\ln(b_n)-1}{\ln b_n}\right)$

ولدينا $b_n \in [e,+\infty[$ إذن $\ln b_n \succ 1$ وبالتالي $b_n \succ f(b_n)$ ومنه :

$$(\forall n \geq 3) \quad b_n \succ n$$

استنتاج : بما أن $b_n \succ n$ $(\forall n \geq 3)$و $\lim(n) = +\infty$ فإن $\lim b_n = +\infty$



2)أ)نبين ان $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية :



ليكن n من N حيث $n \geq 3$.

لدينا $f(a_n) = n$ و $f(a_{n+1}) = n+1$

إذن : $f(a_{n+1}) \succ f(a_n)$

وبما أن f تناقصية قطعا على $]1,e]$ فإن : $a_{n+1} \prec a_n$

ومنه : $a_{n+1} \prec a_n$ لكل n من N حيث $n \geq 3$.

وعليه فإن المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية .

استنتاج : بما أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$تناقصية ومصغورة بالعدد 1 فإنها منتقاربة .

2)ب)نبين أن $\frac{1}{n} \prec \ln a_n \prec \frac{e}{n}$ لكل n من N حيث $n \geq 3$.

ليكن n من N حيث $n \geq 3$.

لدينا $f(a_n) = n$ إذن $\frac{a_n}{\ln a_n} = n$ وبالتالي $a_n = n \ln a_n$

وحيث أن $1 \prec a_n \prec e$ فإن $1 \prec n \ln a_n \prec e$

وبالتالي $\frac{1}{n} \prec \ln a_n \prec \frac{e}{n}$ لكل n من N حيث $n \geq 3$.

استنتاج : لدينا $\frac{1}{n} \prec \ln a_n \prec \frac{e}{n}$: $(\forall n \geq 3)$

إذن : $e^{\frac{1}{n}} \prec a_n \prec e^{\frac{e}{n}}$: $(\forall n \geq 3)$

وحيث أن $\lim e^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{e}{n}} = 1$ فإن

$\lim a_n = 1$ (حسب مبرهنة الدركي ...احتراماتي وتقديراتي !)

2)ج)نبين أن $\lim a_n^n = e$:

لدينا a_n حل للمعادلة (E) .

إذن $e^{a_n} = a_n^n$

بما أن $\lim a_n = 1$ و الدالة الأسية النبيرية متصلة في 1

فإن $\lim e^{a_n} = e^1 = e$

ومنه $\lim a_n^n = e$.



التمرين ا امس:

1) أ) نبين أن $(\forall x \geq 0): \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا . لدينا :

$$0 \le t \le x \Rightarrow e^{-x^2} \le e^{-t^2} \le 1$$
$$\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dt \le \int_0^x e^{-t^2} dt \le \int_0^x dt$$
$$\Rightarrow 0 \le e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \le e^{-x^2} \int_0^x dt$$
$$\Rightarrow 0 \le F(x) \le xe^{-x^2}$$



ومنه : $(\forall x \ge 0) : \; 0 \le F(x) \le xe^{-x^2}$

1)ب)نبين أن $e^{-x^2} \le e^{-x} \; ; \; (\forall x \ge 1)$

$$x \ge 1 \Rightarrow x^2 \ge x$$
$$\Rightarrow -x^2 \le -x$$
$$\Rightarrow e^{-x^2} \le e^{-x}$$

ومنه : $e^{-x^2} \le e^{-x} \; ; \; (\forall x \ge 1)$.

استنتاج : لدينا $(\forall x \ge 0) : \; 0 \le F(x) \le xe^{-x^2}$

إذن $(\forall x \ge 1) : \; 0 \le F(x) \le xe^{-x}$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} =$ فإن

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

2)نبين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ وأن $(\forall x \ge 0) \; ; \quad F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

بما أن الدالة $t \mapsto e^{-t^2}$ متصلة على $[0,+\infty[$ فإن الدالة $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

ومنه F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ولكل x من $[0,+\infty[$ لدينا :

$F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + \left(e^{-x^2}\right)^2$ وبالتالي :

$(\forall x \ge 0) \; ; \; F'(x) == e^{-2x^2} - 2xF(x)$

3)أ)نبين أن G متصلة على اليسار في $\dfrac{\pi}{2}$:

نضع $X = \tan x$ ولدينا: $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) = \lim\limits_{X \to +\infty} F(X) = 0$.

ومنه : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي :

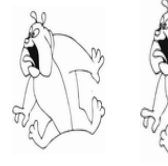
G متصلة على اليسار في $\dfrac{\pi}{2}$.

3)ب) نبين أن $(\exists c \in]0,+\infty[) : F'(c) = 0$.

الدالة G متصلة على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ وقابلة للإشتقاق على المجال $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ و $G(0) = G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

إذن حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي 'c من المجال $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ حيث $G'(c') = 0$.





وبالتالي $\left(1+\tan^2 c'\right)F'\left(\tan c'\right)=0 \quad ; \quad \left(\exists c'\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

ومنه : $F'\left(\tan c'\right)=0 \quad ; \quad \left(\exists c'\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

وبما أن $c'\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\tan c'\in \left]0,+\infty\right[$.

نأخذ $c=\tan c'$ ومنه :

$$\left(\exists c\in \left]0,+\infty\right[\right): F'(c)=0 .$$

وحيث أن $F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$ فإن : $e^{-2c^2}-2cF(c)=0$ أي أن: $F(c)=\frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

4)أ)لنبين أن H تناقصية على $\left]0,+\infty\right[$:

$$H(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}\left(e^{-2x^2}-2xF(x)\right)$$
$$=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

ومنه $H'(x)=\frac{-4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}-e^{-x^2}=\frac{-8x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}\prec 0$

إذن

H تناقصية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$

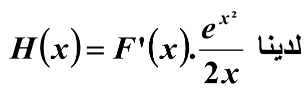
4)ب)نستنتج أن c وحيد :

لدينا $F'(x)=0 \Leftrightarrow H(x)=0$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$ و $H(c)=F'(c).\frac{e^{c^2}}{2c}=0$

وبما أن الدالة H تناقصية <u>قطعا</u> على $\left]0,+\infty\right[$. فإن : $H(c)=0 \quad ; \quad \left(\exists! c\in \left]0,+\infty\right[\right)$

وبالتالي $F'(c)=0 \quad ; \quad \left(\exists! c\in \left]0,+\infty\right[\right)$

جدول تغيرات F :



لدينا $H(x)=F'(x).\frac{e^{x^2}}{2x}$

بما أن x من $\left]0,+\infty\right[$ فإن إشارة $F'(x)$ هي إشارة $H(x)$.

لدينا H تناقصية على $\left]0,+\infty\right[$.

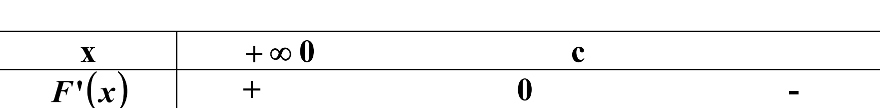
إذا كان $x\le c$ فإن $H(c)\le H(x)$ أي $0\le H(x)$

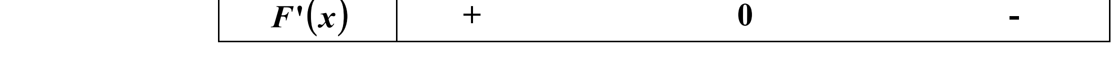
إذا كان $c\le x$ فإن $H(x)\le H(c)$ أي $H(x)\le 0$

ومنه F' موجبة على $\left]0,c\right]$ وسالبة على $\left[c,+\infty\right[$

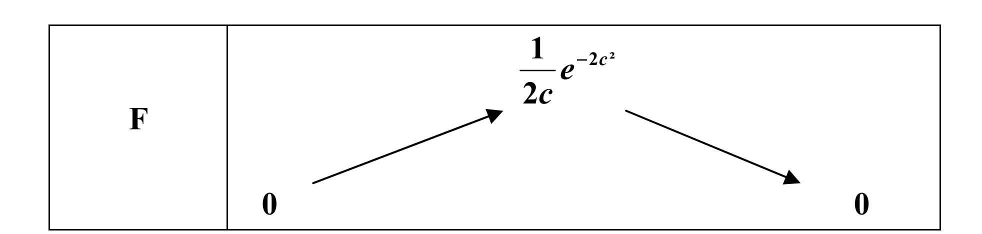


جدول تغيرات F هو :





x	$+\infty$ 0	c	
$F'(x)$	+	0	-



F	$0 \nearrow \dfrac{1}{2c}e^{-2c^2} \searrow 0$

wadiiifi@hotmail.com

وفقكم اللـــــــــــــــــه





